最適化輪読

村松研究室　M1　久米峻也

前回の復習

■ **同型写像**

二つの群$G.G^*$について関数$f: G \to G^*$が全単射でかつ$\forall x, y \in G, f(xy) = f(x)f(y)$を満たすとき<u>$f$を**同型写像**</u>という。

■ **同型**

二つの群G, G^*に同型写像が存在するとき**同型**であるという

準同型写像

- 定義：**準同型写像**

$\forall x, y \in G$について$g: G \to G^*$が

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

を満たすとき、gを**準同型写像**という。

（かつ全単射の時⇒**同型写像**）

- 定義：**核**

群Gの元で、写像gによってG^*の単位元e^*に写像されるもの全体$g^{-1}(e^*)$を準同型写像gの**核**という。

準同型写像

命題：$g: G \to G^*$が準同型写像ならば、

$g(e) = e^*$.

証明：

準同型写像の定義と単位元についての公理より、Gの単位元eと任意の元aについて

$$g(a) = g(ea) = g(e)g(a)$$

が成り立つ。

同様に$g(ae) = g(a)g(e)$より$g(a) = g(a)g(e)$である。

よって単位元の定義より$g(e)$はG^*の単位元である。

■

準同型写像

命題：$g: G \to G^*$が準同型写像ならば、

$$\forall x \in G, g(x^{-1}) = \left(g(x)\right)^{-1}.$$

証明：

$\forall x \in G$についてその逆元をx^{-1}とすると

$$g(xx^{-1}) = g(e) = g(x)g(x^{-1}) = e^*$$

が成り立つ。同様に

$$g(x^{-1}x) = g(e) = g(x^{-1})g(x) = e^*$$

が成り立つ。

よって逆元の定義より$g(x^{-1})$は$g(x)$の逆元$\left(g(x)\right)^{-1}$である。

■

準同型写像

定理：$g: G \to G^*$が準同型写像でgの核をNとするならば、
Nは正規部分群であり群G^*はG/Nと同型である。

[復習]

■ 定義：**核**

群Gの元で、写像gによってG^*の単位元e^*に写像されるもの全体$g^{-1}(e^*)$を準同型写像gの**核**という

■ 定義：**正規部分群**

NをGの部分群だとする。$\forall n \in N, \forall a \in G, a^{-1}na \in N$となるとき、$N$を群$G$の**正規部分群**と呼ぶ。

準同型写像

定理：$g: G \to G^*$が準同型写像でgの核をNとするならば、Nは正規部分群であり群G^*はG/Nと同型である。

[復習]

■ 定義：正規部分群の**剰余群**G/N

$$G/N = \{aN | a \in G\}$$

■ 定義：**同型写像**

二つの群$G.G^*$について関数$f: G \to G^*$が全単射でかつ$\forall x, y \in G, f(xy) = f(x)f(y)$を満たす$f$を**同型写像**という。

■ 定義：**同型**

二つの群G, G^*に同型写像が存在するとき**同型**であるという。

準同型写像

定理：$g: G \to G^{*}$が準同型写像でgの核をNとするならば、Nは正規部分群であり群G^{*}はG/Nと同型である。

証明： スケッチ

1. 核Nが正規部分群である

Nが群である

Nが正規部分群である

2. 群G^{*}はG/Nと同型

$g: G/N \to G^{*}$が全単射であることが言えればよい

準同型写像

定理：$g: G \to G^*$が準同型写像でgの核をNとするならば、
Nは正規部分群であり群G^*はG/Nと同型である。

証明： Nは群である

$\forall x, y \in N, g(xy) = g(x)g(y) = e^*e^* = e^*$より群の公理1を満たす。

$g(e) = e^*$から核の定義より$e \in N$なので群の公理2を満たす。

$\forall x \in N$の逆元は$g(x^{-1}) = \left(g(x)\right)^{-1} = (e^*)^{-1} = e^*$より群の公理3を満たす。

よってNは群である。

■

準同型写像

定理：$g\colon G \to G^*$が準同型写像でgの核をNとするならば、Nは正規部分群であり群G^*はG/Nと同型である。

証明： Nは正規部分群である

$$\forall \mathrm{n} \in N, \forall a \in G, g(a^{-1}na) = g(a^{-1})g(n)g(a)$$

ここで$N = \{x \in G | x = g^{-1}(e^*)\}$より

$$g(a^{-1}na) = g(a^{-1})g(a) = g(e) = e^*$$

よって

$$a^{-1}na \in N$$

よってNは正規部分群である。

■

準同型写像

定理：$g: G \to G^*$が準同型写像でgの核をNとするならば、Nは正規部分群であり群G*はG/Nと同型である。

証明：群G*はG/Nと同型である

全射：$\forall a^* \in G^*, \exists A \in G/N, \forall a \in A, a^* = g(a)$を示す。

$$\forall b^* \in G^*, \exists B \in G/N, b \in B, b^* = g(b)$$

とすると$x \in B$について$x \in Na$であることから

$$g(x){b^*}^{-1} = g(x)g(a^{-1}) = g(xa^{-1}) = e^*$$

であり、$g(x) = b^*$

よって$\forall b^* \in G^*, \exists B \in G/N, \forall b \in B, b^* = g(b)$となり$g$は全射である。 ■

準同型写像

定理：$g\colon G \to G^*$が準同型写像でgの核をNとするならば、Nは正規部分群であり群G*はG/Nと同型である。

証明：群G*はG/Nと同型である

全射：$\forall a^* \in G^*, \exists A \in G/N, \{a^*\} = g(A)$を示す。

$$\forall b^* \in G^*, \exists B \in G/N, b \in B, b^* = g(b)$$

とすると$x \in B$について$x \in Na$であることから

$$g(x){b^*}^{-1} = g(x)g(a^{-1}) = g(xa^{-1}) = e^*$$

であり、$g(x) = b^*$

よって$\forall b^* \in G^*, \exists B \in G/N, \forall b \in B, b^* = g(b)$となり$g$は全射である。 ■

準同型写像

定理：$g{:}\,G \to G^*$が準同型写像でgの核をNとするならば、
Nは正規部分群であり群G*はG/Nと同型である。

証明：群G*はG/Nと同型である

単射：$\forall a, a' \in G, g(a) = g(a') \Rightarrow \exists A \in G/N, a, a' \in A$を示す。

$$\exists b, b' \in G, g(b) = g(b')$$

とすると$g(b'b^{-1}) = g(b')g(b^{-1}) = g(b)g(b^{-1}) = e^*$

であるから$b'b^{-1} \in N$となり$\mathrm{bb}^{-1} \in N$でもあるからb, b'はある同一の剰余群$B \in G/N$に含まれる。

■

準同型写像

定理：$g: G \to G^*$が準同型写像でgの核をNとするならば、
Nは正規部分群であり群G^*はG/Nと同型である。

証明：群G^*はG/Nと同型である

以上の証明でgは全単射であることが示された。

これと準同型写像の定義より$g: G/N \to G^*$は同型写像である。

よってG^*とG/Nの間に同型写像が存在するためこの二つは同型である。

■

準同型写像

例：

$$G = \mathbb{R}, G^* = \{x | x \geq 0\}$$

に対して$g: G \to G^*$を$g(x) = x^2$と定める。

これは$\forall x, y \in G, g(xy) = (xy)^2 = x^2 y^2 = g(x)g(y)$なので$g$は準同型写像である。

このとき$N = g^{-1}(1) = \{-1,1\}$となり、

$$\forall a \in G, a^{-1} 1 a = 1 \in N, a^{-1}(-1)a = -1 \in N$$

なのでNは正規部分群であり$G/N = \{\{x, -x\} | x \in G\}$となる。

このG/NとG^*について

$$A = \{x, -x\} \in G/N, g(A) = x^2$$

でありこれは全単射である。

ここまで

自然な準同型写像

■ 定義：自然な準同型写像

群Gとその正規部分群Nについて$g: G \to G/N$を

$$\forall x \in G, g(x) = Nx \in G/N$$

と定めるとこの写像は準同型写像となる。

事実、剰余類は群であることから

$$\forall x, y \in G, g(x)g(y) = NxNy = NNxy = Nxy = g(xy)$$

が成り立つ。

このように群からその剰余類への写像を、**自然な準同型写像**といい、ほかの準同型写像と区別する。

準同型写像の性質

命題：準同型写像$g: G \to G^*$が核がeだけならば
gは同型写像である。

証明：

gの核がeだけのとき、$N = \{e\}$であるから

$$G/N = \{ex | \forall x \in G\} = G$$

が成り立ち、定理よりgは同型写像である。

■

準同型写像の性質

命題：$g: G \to H^* \subset G^*$が準同型写像ならば
H^*はG^*の部分群である。

証明：

$\forall x, y \in G, xy^{-1} \in G$であるから$g(xy^{-1}) \in H^*$であり

$$g(xy^{-1}) = g(x)g(y^{-1}) = g(x)\big(g(y)\big)^{-1}$$

となるから部分群の必要十分条件の$\forall x^*, y^* \in H^*, x^* {y^*}^{-1} \in H^*$を満たすので$H^*$は$G^*$の部分群である。

■

準同型写像の性質

命題：$g: G \to G^*$が準同型写像でHがGの部分群ならば
$g(H)$はG^*の部分群である

証明：

先ほどの命題より自明

■

準同型写像の性質

命題：$g: G \to G^*$が準同型写像でHがGの正規部分群ならば
$g(H)$はG^*の正規部分群である

証明：

正規部分群の定義より$\forall x \in G, \forall n \in H, a^{-1}na \in H$であるから

$$g(a^{-1}na) = g(a^{-1})g(n)g(a) = \left(g(a)\right)^{-1}g(n)g(a)$$

よって${a^*}^{-1}n^*a^* \in H^*$となりH^*は正規部分群である。

■

準同型写像の性質

命題：$g: G \to H^* \subset G^*$が準同型写像でH^*がG^*の部分群ならば
$g^{-1}(H^*)$はGの部分群である。

証明：

$$\forall x, y \in g^{-1}(H^*),$$
$$g(xy^{-1}) = g(x)\left(g(y)\right)^{-1} \in H^*$$

であるから$xy^{-1} \in g^{-1}(H^*)$を満たすので$g^{-1}(H^*)$はGの部分群である。

■

準同型写像の性質

命題：$g\colon G \to H^* \subset G^*$が準同型写像で$H^*$が$G^*$の正規部分群ならば
$g^{-1}(H^*)$はGの正規部分群である。

証明：

$$\forall x \in G, \forall n \in g^{-1}(H^*),$$

$$g(x^{-1}nx) = \left(g(x)\right)^{-1} g(n)g(x) \in H^*$$

であるから$x^{-1}nx \in g^{-1}(H^*)$を満たすので$g^{-1}(H^*)$はGの正規部分群である。

■

準同型写像の性質

命題：$g: G \to G^*, g^*: G^* \to G^{**}$が共に準同型写像ならば
$h = g^* g: G \to G^{**}$は準同型写像である。

証明：

$$\forall x, y \in G, g^*\big(g(xy)\big) = g^*\big(g(x)g(y)\big) = g^*\big(g(x)\big)g^*(g(y))$$

よって$\mathrm{h} = g^* g$は準同型写像である。

■