連続群論輪読 第2回

村松研究室B4 高野将吾

群の元の位数

- 群の元 a に対して、$a^m = e$ となるような $m \in N$ が存在するとき、元 aは有限の位数を持つという

- そうでないとき、元 a は位数が無限、位数0、自由元であるなどという

- ある元 a について、r を $a^r = e$ となる最小の自然数として定義する

群の元の位数

$\exists n, a^n = e$ ならば、n は r で割り切れる

証明 $n = pr + q (0 \leq q < r)$ とする。

$$e = a^n = a^{pr+q}$$
$$= (a^r)^p a^q \quad \text{(指数法則)}$$
$$= e^p a^q$$
$$= a^q \quad \text{(公理2)}$$

$a^q = e$ より $q = 0$ 、よって n は r で割り切れる

例.乗積表

群 $G = \{e, s, t, u, v, w\}$

e の位数は1

s, t, w の位数は2

u, v の位数は3

·	e	s	t	u	v	w
e	e	s	t	u	v	w
s	s	e	v	w	t	u
t	t	u	e	s	w	v
u	u	t	w	v	e	s
v	v	w	s	e	u	t
w	w	v	u	t	s	e

集合の変換

- ある集合 Γ からそれ自身の1対1対応を、集合Γ の変換という

  x, yをΓ の変換とすると、$z = xy$ で表される

  x, y の積は $\forall\xi \in \Gamma$について、$z(\xi) = x(y(\xi))$ と定義される

- 恒等変換とは、$\forall\xi \in \Gamma$ に対して $e(\xi) = \xi$ と定義される

  $ex = xe = x$ が成り立つ
  e は単位元である

- 逆変換x^{-1}とは、集合Γ のすべての元 $x(\xi)$を ξ に写すもの

  $x^{-1}x = e$ が成り立つ

  x^{-1} は左逆元であり、右逆元でもある

集合の変換

- 結合律が成り立つことを示す

  x, y, z を集合Γ の3つの変換とする

  $\forall \xi \in \Gamma$について、$(xy)z(\xi) = (xy)(z(\xi)) = xy(z(\xi)) = x(y(z(\xi)))$

  また、$x(yz)(\xi) = x(yz(\xi)) = x(y(z(\xi)))$

  よって、$(xy)z = x(yz)$

- 以上の性質を満たす変換の集合を、Γ の変換群として定義する

集合の変換

- 集合 Γ の変換群 G は、$\forall\xi, \forall\eta \in \Gamma, \exists x \in G, x(\xi) = \eta$ が成り立つとき、推移的であるという
- 集合 Γ のすべての変換よりなる群は推移的である
  $\forall\xi, \forall\eta \in \Gamma, \exists x \in G, x(\xi) = \eta, x(\eta) = \xi, x(\zeta) = \zeta (\zeta \neq \xi, \eta)$

例

- $\Gamma_n = \{1, 2, ..., n\}, G_n$ を Γ_n の変換全体のなす群とする

  Γ_n の変換は置換ともいう

  各置換は、巡回置換の積に分解される

巡回置換$(i_1, i_2, ..., i_k)$ とは、i_1を i_2に、i_2 を i_3に、i_k をi_1に置換

  変換群 G_n は $n!$個の元を含んでいる

  → n 個の数字の並べ方が$n!$通りであるため

例

- $n=3$のとき$\Gamma_3=\{1,2,3\}$に対して

$$G_3=\{a=(1,2)(3), b=(1,3)(2), ab=(1,3,2),$$
$$ba=(1,2,3), aba=(1)(2,3), e=(1)(2)(3)=a^0\}$$

a, b はG_3 の生成元である
a, b, aba は位数2、 ab, ba は位数3である
$ab \neq ba$ より、非可換である

例2

- i行j列の複素行列rと、j行k列の複素行列sを考える
  行列の積rsが定義できる
- 行列式が0でないn次正方行列全体の集合Gが、
  行列の積に関して群をなす

  結合律…行列の乗法の定義より
  単位元…単位行列
  左逆元…行列式が0でないため逆行列が存在する

実数行列に関しても同じことが言える