連続群論

村松研 B4, 福田優真

2016 年 11 月 11 日

命題 1. 群 G 及びその部分集合 A に対し、$AG = GA = G$。

Proof. まず、$AG \subset G$ を示す。

$$AG = \{ag \mid a \in A, g \in G\}$$

となる。ここで、$A \subset G$ より $ag \in G$。ゆえに、$AG \subset G$。次に、$G \subset AG$ を示す。$g \in G$ をとり、$g = ag'$ となる $g' \in G$ が存在すれば良い。g' は G の任意の要素なので $g' = a^{-1}g$ ととってくると、

$$ag' = aa^{-1}g = g$$

よって、任意の g に対して、$g = ag'$ となる $g' \in G$ をとってこれるので、$g \subset AG$。以上から $AG = G$。GA の場合も同様にして、$AG = GA = G$。 □

命題 2. 群 G に対し、$G^{-1} = G$。

Proof. $G^{-1} \subset G$ を示す。$x \in G^{-1}$ をとってくると、$G^{-1} = \left\{x^{-1} \mid x \in G\right\}$ から $x^{-1} \in G$。G は群なので、$(x^{-1})^{-1} = x \in G$。よって、$G^{-1} \subset G$。$G \subset G^{-1}$ を示す。$x \in G$ をとってくると、逆元 x^{-1} も $x^{-1} \in G$。そこで、$G^{-1} = \left\{x^{-1} \mid x \in G\right\}$ から $(x^{-1})^{-1} = x \in G^{-1}$ なので、$G \subset G^{-1}$。以上から、$G^{-1} = G$。 □

命題 3. 群 G の部分集合 A 及び e に対し、$Ae = eA = A$。

Proof.

$$\begin{aligned} Ae &= \{ae \mid a \in A, e \in G\} \\ &= \{a \mid a \in A\} \\ &= A \end{aligned}$$

である。eA も同様にして $Ae = eA = A$。 □

命題 4. 群 G の部分集合 H の任意の *2* 元 a, b と共に、元 ab^{-1} もまた H に含まれることが、H が部分群となるための必要十分条件である。

Proof.

十分条件 ($a, b \in H$ に対し、$ab^{-1} \in H$ ならば H は群)

単位元　$ab^{-1} \in H$ なので、$b = a$ とすると、$aa^{-1} = e$。

逆元　$ab^{-1} \in H$ なので、$a = e$ とすると、$eb^{-1} = b^{-1} \in H$。

結合律　$\forall a, b \in H$ に対し、$ab \in H$ が言えれば良い。$b^{-1} \in H$ なので、$a(b^{-1})^{-1} = ab \in H$。

<u>必要条件 (H が群ならば $a, b \in H$ に対し、$ab^{-1} \in H$)</u>

これは H が群である、すなわち逆元・単位元・結合律の存在から明らか。

□

命題 5. 群 G の任意の部分集合 H の任意の 2 元 a, b と共に、元 ab 及び b^{-1} がまた H に含まれることが H が部分群となるための必要十分条件である。

Proof.

<u>十分条件 ($a, b \in H$ に対し、$ab \in H$ かつ $b^{-1} \in H$ ならば H は群)</u>

単位元　任意の $b \in H$ に対し、$b^{-1} \in H$ となり、$a, b \in H$ に対して、$ab \in H$ だから $bb^{-1} = e \in H$。

逆元　仮定から $b^{-1} \in H$。

結合律　仮定から $ab \in H$ なので $a, b, c \in H$ に対して、$(ab)c \in H$ かつ $a(bc) \in h$ であり、明らか。

<u>必要条件 (H が群ならば $a, b \in H$ に対し、$ab \in H$ かつ $b^{-1} \in H$)</u>

H が群なので、群の結合律、逆元の存在から明らか。

□