連続群論

村松研究室 B4, 福田優真

演算

群Gの部分集合をA, Bとして、次のような演算を導入($m \in \mathbb{N}$)

- 積

  $AB = \{xy | x \in A, y \in B\}$

- 巾
  - $A^{-1} = \{x^{-1} | x \in A\}$
  - $A^{m} = \begin{cases} A & \text{if } m = 1 \\ A^{m}A & \text{if } m > 1 \end{cases}$
  - $A^{-m} = (A^{-1})^{m}$
  - $A^{0} = \{e\}$

※ 加法記号に対してはABの代わりに$A + B$と書き、A^{n}の代わりにnAと書く

演算

ルール「*場合によっては一つの元を含む集合とその元自体を区別しない*」を導入

例. $\{e\}$とeを区別せず同じものとして扱う

⇓

$A \subset G, b \in G$に対し、Abという演算を考えられる

演算

Aが空でないとき、次の演算が成立する

- $AG = GA = G$
- $G^{-1} = G$
- $Ae = eA = A$

部分群

- 群Gにおける乗法によって群となる、Gの部分集合Hのこと
  例. $\mathbb{R}$の部分集合$\{-1,1\}$は乗法に関して$\mathbb{R}$の部分群

- 部分群となるためには次の2条件のうち、どちらかを満たすことが必要十分条件
  a. $a, b \in H$に対し、元$ab^{-1} \in H$である。すなわち$HH^{-1} \subset H$

  b. $a, b \in H$に対し、元ab及びb^{-1}がまたHに含まれる。すなわち$H^2 \subset H$および$H^{-1} \subset H$