群論資料

市橋 志朗

2016 11 18

命題１．任意の群は、その勝手な１元の全ての整数巾よりなる集合を、それ自身の部分群として含んでいる。

Proof.
群 G の $a \in G$ に対して $H = \{..., a^{-1}, e, a, a^2, ..\}$ とする。
H が G の部分群であることを言えば良い。
$\forall l, m \in \mathbb{Z}, \quad a^l, a^m \in H$ とする。
教科書 p6.B(a) より $a^l a^{-m} = a^{l-m} \in H \qquad \because (l-m) \in \mathbb{Z}$
よって H は G の部分群である。 □

命題２．無限巡回群 G の元はすべて自由元

Proof.
群 G の $b \in G$ に対して $\mathrm{G} = \{..., b^{-1}, e, b, ..\}$ とする。
$\exists a \in G/\{e\}, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad a^m = e$ と仮定する。
ここで、G は無限巡回群より
$\exists k \in \mathbb{Z}, \quad a = b^k \in G$ を考えると $a^m = (b^k)^m = e$
$b^{-km} = e$ なので、$km > 0$ で考えてよい。
$G = \{e, b, b^2, ..., b^{km}, b^{km+1}...\}$ より
$b^l = b^{l^{'}(km)+l^{''}} = b^{''}$ かつ $l^{''} < km$ であるので
$b^k m = e \Rightarrow |G| < km$ となる
これは G が無限巡回群であることに矛盾してしまうので、G の元は自由元となる。 □

命題３．群 G に対し、H を部分群とする。
$\forall a, b \in G, \quad ab^{-1} \in H \Leftrightarrow a \sim b$
このとき、G の同値関係は、反射律、対称律、推移律を満たす。

Proof.
(i) 反射律
$\forall a \in G, \quad aa^{-1} \in H$
よって $a \sim a$
(ii) 対称律
$ab^{-1} \in H$ のとき
$(ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} \in H$
よって $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

(iii) 推移律
$ab^{-1} \in \quad H$ かつ $bc^{-1} \in H$ のとき
$ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) \in H$ より
$a \sim b$ かつ　$b \sim c \Leftrightarrow a \sim c$ $\square$

命題４．A を H のある右剰余類とし、$a \in A$ とする。このとき $A = Ha$

Proof.
(i)$A \subseteq Ha$
$x \in A$ とする。
$xa^{-1} = h \in H$ より、$x = ha \Rightarrow x \in Ha$
(ii)$Ha \subseteq A$
$y \in Ha$ とする。
このとき $\exists k' \in H, \quad y = k'a$
従って $ya^{-1} = k'aa^{-1} \in H \Rightarrow y \in A$
(i),(ii) より A=Ha $\square$

補足：類について
群 $G : (\mathbb{Z}, +)$ に対して $G_1 : 3z$,$G_2 : 3z+1$,$G_3 : 3z+2$ とすると (G_1, G_2, G_3 は部分群ではなく単なる集合)
$G = G_1 \cup G_2 \cup G_3, \quad G_i \cap G_j = \phi (i \neq j)$
分割した各組を集合 G の類と呼びこのような組み分けを類別と呼ぶ。

補足:2x2 行列での右剰余類の例について
$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc \neq 0 \right\}$
$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}$
$H \subseteq G, I \in H$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in H$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & -y \\ -z & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw - bz & -ay + bx \\ cw - dz & -cy + dx \end{pmatrix}$
ここで
$(aw - bz)(-cy + dx) - (bx - ay)(cw - dz)$
$= (adxw + bcyz) - (bczw + adyz)$
$= (ad - bc)xw - (ad - bc)yz$
$= (ad - bc)(xw - yz) = (ad - bc) \neq 0$ より H は G の部分群である。
例えばこの時 A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in G$,B= $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in G$ は同値関係にある。何故ならば C=$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in H$ を用いて $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ つまり $A = CB$ とすることが出来るからである。