連続群論輪読 第4回

村松研 M2　市橋 志朗

部分群

・任意の群は、ある一元の全ての整数巾よりなる集合を、それ自身の部分群として含んでいる。

$a \in G$の時　$\mathrm{H} = \{\dots, a^{-1}, e, a, \dots\}$とする。

このとき、Hは群Gの部分群である。(資料にて証明)

巡回群

・群がある一つの元の巾全体よりなっているとき、その群を**巡回群**と言う

$a \in G$で　$\mathrm{G} = \{\ldots, a^{-1}, e, a, \ldots\}$は巡回群

かつ元のaの位数が無限の時は

無限巡回群（自由巡回群）という。

巡回群

▪無限巡回群Gの元はすべて自由元である。(資料にて証明)

（おさらい）

$a \in G$に対して、$a^m = e$となるような$\mathrm{m} \in M$が存在するとき、元aは有限の位相をもつと言う。

そうでないときは、元aは位数が無限、位数0、自由元であるという。

同値関係

・ある集合Mにおいて、同値関係が定義されているときは任意の2元a, bに対して同値か否か$\mathrm{a} \sim \mathrm{b}$　$\mathrm{a} \nsim \mathrm{b}$と記述

さらに以下の3条件を満たす。

a)反射律 : $a \sim a$

b)対称律 : $a \sim a$ならば$b \sim a$

c)推移律 : $a \sim b$かつ$b \sim \mathrm{c}$ならば$a \sim c$

同値関係

・Gをある群、Hをその部分群とする。

Gの２元a,bを、$\mathrm{ab}^{-1} \in H$であるとき、かつその時に限り$a \sim b$と考える。

・集合Gによって設定される同値関係は、反射律、対称律、推移律を満たし、互いに同値な元の類に分割される。(資料にて証明)

右剰余類

・ここで得られた類を、群Gの部分群Hに関する右剰余類と言う。

・Aを部分群Hに関するある右剰余類、かつ$\mathrm{a} \in A$とすれば、A=Haとなる。
(資料にて証明)

右剰余類

- 逆にHbなる形の部分集合は、それぞれ一つの右剰余類
- $H = He$より、部分群Hはそれ自身一つの右剰余類