連続群論輪読 第5回

Muramatsu Lab. M2
Tomohiro Kohmura

2016/12/2

前回の続き:右剰余類
復習:現在の状況

G:群, H:Gの部分群.

$a \sim b \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \forall a, b \in G, ab^{-1} \in H.$

A:Hに関する右剰余類, $a \in A \Rightarrow A = Ha.$

$ex)$

$G : M(n;R)$ (n次実行列)

$H = \{a \in G \mid \det(a) = 1\}$

$$a \sim b \Leftrightarrow \det(ab^{-1}) = 1$$
$$\Leftrightarrow \det(a)\det(b^{-1}) = 1$$
$$\Leftrightarrow \det(a)\det(b)^{-1} = 1$$
$$\Leftrightarrow \det(a) = \det(b)$$

右剰余類. $(p \in \Re)$

$A = \{a \in G \mid \det(a) = p\}$

$a \in A$に対して,

$A = Ha = \{ha \mid h \in H\}.$

$$\det(ha) = \det(h)\det(a) = p$$

前回の続き:右剰余類

各右剰余類の濃度はすべて部分群 H の濃度に等しい.

証明) Hから右剰余類への全単射を構成できればよい.

右剰余類Aを1つとる. $a \in A$に対して,
$f_a : H \to A$とし, $f_a(h) \mapsto ha$と定める.
$h_1, h_2 \in H$に対して,
$f_a(h_1) = f_a(h_2)$とする.
$\Rightarrow h_1 a = h_2 a \Rightarrow h_1 = h_2$
$(\because \exists a^{-1} \in G, h_1 a a^{-1} = h_2 a a^{-1})$
よって, f_aは単射.

また, $A = Ha$より
$\forall b \in A, \exists h \in H, b = ha = f_a(h)$.
従って, f_aは全射.

$\therefore f_a$は全単射となり, HとAの濃度は等しい. ■

特に, G が位数 g の有限群で,
部分群 H が位数 h をもてば,
g は h で割り切れ, g/hは
右剰余類の数となる.

G の右剰余類の数を xとすると,
$g = hx$ 即ち $x = g/h$.

左剰余類

Gをある群 , Hをその部分群とする . Gの2元a,bを ,
$a^{-1}b \in H$ なるとき , かつそのときに限り $a \sim b$と考える .

この同値関係によって 得られる類を , 部分群 H に関する
左剰余類という .

右剰余類と同様 ,
・各左剰余類は aH なる形に書ける
・bH なる形の部分集合は一 つの左剰余類となる
(証明は省略)

次に , 右剰余類と左剰余類が 一致する場合について 考える .

正規部分群
定義3

N を群 G の部分群とする．すべての $n \in N$ 及びすべての $a \in G$ に対して $a^{-1}na \in N$ となるとき，換言すれば，すべての $a \in G$ に対して $a^{-1}Na \subseteq N$ となるとき，N を群 G の不変部分群または正 規部分群という．

例：群表（出典：第2回）

·	e	s	t	u	v	w
e	e	s	t	u	v	w
s	s	e	v	w	t	u
t	t	u	e	s	w	v
u	u	t	w	v	e	s
v	v	w	s	e	u	t
w	w	v	u	t	s	e

正規部分群は

$\{e, s, t, u, v, w\}$

$\{e\}$

の2つ．

また，G が可換群のとき，G の部分群は必ず正規部分群になる．

正規部分群

> Nが正規部分群のとき，すべての$a \in G$に対して
> $a^{-1}Na = N$である.

証明)
Nは正規部分群であるから，
$\forall a \in G,\ a^{-1}Na \subseteq N \quad \cdots (i)$.

上式で$a = b^{-1}$とおくと，
$bNb^{-1} \subseteq N$.
ここで左からb^{-1}，右からbを乗ずれば，
$N \subseteq b^{-1}Nb$.
今，aは任意の元であるから
bもGの任意の元である．よって
$\forall b \in G, b^{-1}Nb \supseteq N \quad \cdots (ii)$.

$(i),(ii)$より，
$\forall a \in G, a^{-1}Na = N$ ■

正規部分群

部分群Nに関する左右の剰余類　が一致する
$\Leftrightarrow$ Nが正規部分群

証明)
($\Leftarrow$) $Nb = bN$.

($\Rightarrow$) AをNに関する右剰余類とす　る.
$a \in G$に対して, $A = Na$.
一方で, $Na = aN$より
$a^{-1}Na = N$ ($\because \exists a^{-1} \in G$)
$\Rightarrow a^{-1}Na \subseteq N$
$\Rightarrow$ Nは正規部分群 . ■

剰余群
定義4

　N を群 G の正規部分群とし，更に A, B を N に関する剰余類：$A = Na,\ B = Nb$ とする．
積 AB を作れば，$AB = NaNb = NNab = Nab$
即ち，積 AB はまた N による剰余類である．

　こうして剰余類の集合において乗法が定義され，かつそれは，群の公理を満足する．
　このようにして得られた剰余類の群を，群 G の正規部分群 N による剰余群といい，G/N で表す．

剰余群
定義4

証明) 剰余群 G/N において, 群の公理 (1), (2), (3) を満たしていればよい .

(1) 結合律
$\forall A, B, C \in G/N$ について,
以下が成り立つ .

$$
\begin{aligned}
(AB)C &= (Nab)Nc \\
&= NNabc \\
&= Nabc \\
A(BC) &= Na(Nbc) \\
&= NNabc \\
&= Nabc
\end{aligned}
$$

したがって,
$(AB)C = A(BC)$.

(2) 単位元が存在する
$N, \forall A \in G/N$ について,

$$
\begin{aligned}
NA &= NNa \\
&= Na \\
&= A
\end{aligned}
$$

よって, N は G/N の単位元 .

剰余群
定義4

証明) 剰余群 G/N において, 群の公理 (1), (2), (3) を満たしていればよい .

(3) 逆元が存在する
$\forall A = aN \in G/N$ について,
$a \in G$ より, $a^{-1} \in G$ が存在する .
このとき $A^{-1} = Na^{-1}$ とおけば,

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= Na^{-1}aN \\ &= NeN \\ &= NN \\ &= N \end{aligned}$$

したがって, G/N の任意の元 A
について, その逆元 A^{-1} が存在する .

(1) (2) (3) より, 剰余群 G/N は
群の公理を満たしている. ■

剰余群
ex)

G:群, H:Gの正規部分群, A:Hに関する剰余類.

$$H=\{a\in G\mid \det(a)=1\}$$

$A=Ha$とすると,
$A=\{b\in G\mid \det(b)=\det(a)\}$

剰余類Aはその det で係数づけられる.
その det を$\det(A)$と表す.

$$A\bullet B=C=\{c\in G\mid \det(c)=\det(A)\times\det(B)\}$$