連続群論輪読

電気通信大学 情報・ネットワーク工学専攻
情報数理工学プログラム 高橋研究室
修士 1 年 水野博文

準同型写像

Definition (準同型写像)

群 G, G^* に対して,
$\forall x, y \in G, g(xy) = g(x)g(y)$ となる
写像 $g : G \to G^*$ を準同型写像という.

Definition (正規部分群)

群 G に対して,
$\forall n \in N, \forall x \in G, x^{-1}nx \in N$ となる
部分群 N を G の正規部分群という.

準同型写像

Theorem (定理 1)

準同型写像 $g : G \to H^* \subset G^*$ **に対して** g **の核を** N **とする**
N **は正規部分群であり**, G **と** G/N **は同型である**

C) 自然な準同型写像

Theorem

群 G, **その正規部分群** N**，写像** $g: G \to G/N$ **に対して，**
ここで $g(x) = X = Nx$ **と定義すると写像** g **は準同型となり，**
これを群からその剰余群の上への自然な準同型写像 という。

$\forall x, y \in G, g(xy) = g(x)g(y)$ **を示せばよい**.

Proof.

x,y $\in G$ **に対して** g **の定義より** $g(x) = Nx, g(y) = Ny$
g(x)g(y) = NxNy = NNxy = Nxy
g(xy) = Nxy
よって $g(xy) = g(x)g(y)$ □

D)

Theorem

準同型写像 $g : G \to G^*$ **の核が単位元のみ**
即ち， $N = \{e\}$ **ならば** g **は同型写像である**.

(同型写像:全単射な準同型写像)

Proof.

N=e **より** $G/N = \{Nx | x \in G\} = G$
定理 1 **より** g **は同型写像である**. □

E)

Theorem

準同型写像 $g : G \to H^* \subset G^*$ **に対して，**
集合 H^* **は** G^* **の部分群である**.

$\forall x^*, y^* \in H^*, x^* {y^*}^{-1} \in H^*$ **を示す**

Proof.

$x^*, y^* \in H^*$ **に対して**
$x^* = g(x), y^* = g(y)$ **となる** x,y$\in$ G **が存在**
$x^* {y^*}^{-1} = g(x) g(y^{-1}) = g(x y^{-1}) \in H^*$
よって $\forall x^*, y^* \in H^*, x^* {y^*}^{-1} \in H^*$ **より**
H^* **は部分群である**. $\square$

F)

Theorem

準同型写像 $g : G \to G^*$ **に対して，**
H **が** G **の部分群ならば** $g(H)$ **は** G^* **の部分群であり，**
H **が** G **の正規部分群ならば** $g(H)$ **は** G^* **の正規部分群である．**

部分群について

$\forall x^*, y^* \in g(H), x^*y^* - -1 \in g(H)$ **を示す**.

Proof.

$x^*, y^* \in g(H)$ **に対して** $x^* = g(x), y^* = g(y)$ **となる** x,y$\in H$ **が存在**

$x^*y^{*-1} = g(x)g(y^{-1}) = g(xy^{-1}) \in g(H)$ □

正規部分群について

$\forall h^* \in g(H), \forall a^* \in G^*, a^{*-1}ha^* \in g(H)$ **を示す**.

Proof.

$h^* \in g(H)$ **に対して** $h^* = g(h)$,

$a^* = G^*$ **に対して** $a^* = g(a)$ **となる** $h \in H, a \in G$ **が存在**

$a^{*-1}ha^* = g(a^{-1})g(h)g(a) = g(a^{-1}ha) \in g(H)$ □

G)

Theorem

準同型写像 $g : G \to G^*$ に対して，
H^* が G^* の部分群ならば $g^{-1}(H^*)$ は G の部分群であり，
H^* が G^* の正規部分群ならば $g^{-1}(H^*)$ は G の正規部分群である.

Proof.

(H) と同様にして成り立つ. □

H)

Theorem

準同型写像 $g : G \to G^*$**，** $g^* : G^* \to G^{**}$ **に対して**
写像 $h = g^* g$ **は** G **から** G^{**} **への準同型写像となる**.

$\forall x, y \in G, h(xy) = h(x)h(y)$ **を示せばよい**

Proof.

$x, y \in G$ **に対して**
$h(xy) = g^*(g(xy)) = g^*(g(x)g(y)) = g^*(g(x))g^*(g(y)) = h(x)h(y)$ $\square$

I) 変換群

Definition

群 G が集合 Γ の変換群であるとは
$x \in G$ に Γ の変換 x^* が対応して
準同型写像 $\tau : G \to G^*$ に関して
$x^* = \tau(x)$ としたとき, $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$ となること

(Γ 上の変換とはそれ自身への 1 対 1 対応の写像のこと)
τ の核を変換群 G の無効核という.
τ が同型写像のとき群 G をエフェクティブな変換群という

$x \in G$ を $x = x^*$ とすると群 G, G^* は一致する

Definition (推移的)

$\forall \zeta, \eta \in \Gamma, \exists x \in G, x^*(\zeta) = \eta$

Definition (相似写像)

G を Γ の変換群, G' を Γ' の変換群とする
写像 φ が G$\rightarrow G'$ の同型写像、
ψ が $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ の全単射の写像であり
$x' = \varphi(x), \zeta' = \phi(\zeta) \Rightarrow x'^*(\zeta') = \phi(x^*(\zeta))$ のとき
φ, ψ を G, Γ から $G'\Gamma'$ の上への相似写像という

また G, Γ から $G'\Gamma'$ への相似写像が存在するとき
G, Γ から $G'\Gamma'$ は相似であると定義する